

待ち行列における過渡状態に関する研究(1)

— $M/M/1(\infty)$ における過渡状態の解析解—

光 成 豊 明

On the Transient Behavior of the Queueing System (1)

—Analytical solution of the transient behavior of $M/M/1(\infty)$ system—

Toyoaki MITSUNARI

Synopsis

The purpose of this paper is to investigate the transient behavior of a simple queue and to propose the numerical method of the transient behavior.

This paper gives the well-known analytical solution method of the transient behavior of a simple queue and proposes the difference equation method.

The results are as follows;

(1) The analytical method proposed by T.L. Saaty is sometimes not applicable. The reason why the analytical solution can not be calculated is that the restricting condition of the modified Bessel function of the first kind exists and that calculated error is very large.

(2) The proposed difference equation method is applicable, because the restricting condition does not exist and the calculation is easy and the calculated error is small, compared with that in Saaty's method.

1. は じ め に

待ち行列理論は、電話交換の問題、道路上の交通管制の問題、需要予測等に適用されており、機械工業においては、機械故障と修理員の問題、機械割当の問題、設備配置の問題、生産工程におけるスケジューリングの問題等に適用されている。

待ち行列理論の理論的研究は、1909年に発表された Erlang, A.K. の論文¹⁾が、最初であるといわれている。その後電話交換の問題として発展をとげ、第2次大戦後 O.R. 活動の活発化に伴い数多くの論文が発表されている。

待ち行列の研究の目的は、買い物客や電話回線、客待ちのタクシー、診療所の患者など、“行列”を作って待っている現象を、理論的に解明し、その行列に関してのサービスなどの対策

をたてる一助にすることにある。

ところで、多くの論文では、生産工程が定常状態（平衡状態）についての研究が行なわれているが、生産工程の稼動初期の状態や平衡状態に達する前に終了してしまうような少量生産工程の状態などのように、現実には、平衡状態に達する前に生産が終了してしまうものが存在する。

これに対応する待ち行列理論の適応に対しては、過渡状態における理論研究が必要とされる。この点に関しては、Lerderman, W. および Reuter, G.E.⁽⁶⁾, Saaty, T.L.⁽⁸⁾, Bailey, N. T.J.⁽¹⁾ などの研究があるが、これらの研究は、理論的研究のみで数値計算など実際に適用する場合の問題の考察がなされていない。

本研究の目的は、過渡状態における待ち行列理論の研究のうち、とくに $M/M/1(\infty)$, すなわち到着の時間間隔が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従い、サービス窓口が1つの先着順サービスで、そのサービス分布が平均 $1/\mu$ の指数分布に従い、行列の長さは無制限に許される待ち行列について、よく知られている Saaty, T.L. の解析解と、上野・阪本による微分方程式にもとづく数値解法¹⁰⁾の問題点を考察し、著者の差分方程式による数値解法を提案することにある。

2. システムの評価尺度

一般に、平衡状態における待ち行列システムの評価尺度としては、待ち行列の平均、系の長さの平均、サービス窓口がふさがっている確率などがある。

したがって過渡状態における評価尺度もこれらと対応することによって、はじめて意味のあるものと考えられる。そこで、本章では過渡状態と比較すべき平衡状態の待ち行列の平均と窓口がふさがっている確率の2つの評価尺度を求めることにする。

本論文の対象である $M/M/1(\infty)$ システムにおいて、 λ を平均到着率とすると、 n 番目の客と $n+1$ 番目の客の到着時間間隔 t は、いずれも同一の確率密度関数

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

をもち、かつ到着時間間隔は、互に独立であるとする。

また n 番目の客に対するサービス時間 t' は、 μ をサービス率とすると、いずれも同一の確率密度関数

$$g(t') = \begin{cases} \mu e^{-\mu t'}, & t' \geq 0 \\ 0, & t' < 0 \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

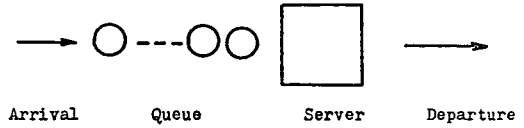
をもち、かつサービス時間は、互に独立であるとして、その上 t と t' も互に独立であると仮定する。

指数分布の性質から、非常に短い時間間隔間 $(t, t+dt)$ にただ1人客が到着する確率は、

$$P_1(t+\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)$$

$$= \lambda\Delta t \left\{ 1 - \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 + \dots \right\}$$

$$= \lambda\Delta t + O(\Delta t).$$



である。ここで、 $O(\Delta t)$ は、2人以上が到着する確率は無視するほど小さいことを意味している。

以上のことを考慮して、平衡状態において状態 n (系の長さ (サービスを受けている人と行列を作って待っている人の和) が n) である確率を P_n とすると、 n が $n+1$ に変化する状態 (客が到着して1人ふえる) は、 λ の割合で起こり、 n が $n-1$ に変化する状態 (サービスが終了して1人減る) は、 μ の割合で起こるから、平衡状態式は次式で示される。

	Arrival Distribution	Service Distribution
Probability density function	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$g(t') = \mu e^{-\mu t'}$
Mean	$E(t) = \frac{1}{\lambda}$	$E(t') = \frac{1}{\mu}$
Variance	$V(t) = \frac{1}{\lambda^2}$	$V(t') = \frac{1}{\mu^2}$

Fig. 1 M/M/1(∞) system

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

つぎに、サービス窓口に客がいらない ($n=0$) ときは、推移できる状態は客が1人到着してサービスを受ける ($n=1$) という状態しかないので、平衡状態式は、

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \quad (n=0) \quad (2)$$

となる。

この(1)、(2)式が、本研究の待ち行列システムの基本方程式である。

(2)式において、 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ とおくと

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0$$

ここで、 ρ をトラフィック密度とか利用率と呼んでいる。

また(1)式で、 $n=1$ のときには、

$$\lambda P_0 + \mu P_2 = (\lambda + \mu) P_1$$

この式に P_1 を代入して

$$P_2 = \frac{1}{\mu} \{ (\lambda + \mu) \rho - \lambda \} P_0 = (\rho^2 + \rho - \rho) P_0 = \rho^2 P_0$$

となる。

さらに(1)式で、 $n=2$ とおいた式に、 P_1, P_2 を代入して、 $P_3 = \rho^3 P_0$ が得られる。

この操作を順次くりかえすと、結局

$$P_n = \rho^n P_0 \quad (3)$$

となる。

ここで、 P_0 を求めるには、状態 n になるすべての確率 (S) を加えると1になるという条件から次式が成立する。

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} P_0 = 1$$

もし $\rho < 1$ ならば、

$$S = \frac{1}{1 - \rho} P_0 = 1$$

となるので

$$P_0 = 1 - \rho \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。

また $\rho \geq 1$ ならば

$$S = (\infty) P_0 = \infty$$

となり発散してしまう。

これらのことを、生産工程に置き換えると、 $\rho < 1$ であることは、加工部品と機械設備の能力とのバランスが保たれていることを示しており、 $\rho \geq 1$ ならば、加工部品が機械設備の能力以上に到着してしまうので、滞留する部品が増大していくことを示している。

このことから、平衡状態においては、 $\rho < 1$ という条件で生産しなければならないことになる。

平衡状態における待ち行列のシステムの評価尺度としては、次のようなものが考えられる。

〈1〉 待ち行列の平均

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad \dots\dots\dots (5)$$

〈2〉 窓口がふさがっている確率

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \rho \quad \dots\dots\dots (6)$$

その他として、待ち時間の平均 W_q 、系の長さの平均 L 、 t 時間より多く待たされる確率 $P(T > t)$ 、待ち行列系の中で費やされる全時間の平均 W などが考えられる。

そこで、次章で述べる過渡状態におけるシステムの評価尺度として、〈1〉、〈2〉を用いることにした。

3. 過渡状態における解析解

待ち行列 $M/M/1(\infty)$ システムにおける過渡状態に関する研究には、各種のものがあるが、本研究では、もっとも一般的であると思われる Saaty, T.L. の解析解⁹⁾を採用してみた。

この方法では、時刻 $t=0$ のときの系の長さが i であるとして、時刻 t における系の長さが n になる条件付き確率を $P_{in}(t)$ とおくと、次の結果が得られる。

$$P_{in}(t) = e^{-(\lambda + \mu)t} [\sqrt{\rho}^{n-i} I_{n-i}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \sqrt{\rho}^{n-i-1} I_{n+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + (1 - \rho) \rho^n \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \sqrt{\rho}^{-k} I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t)] \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!(\nu+k)!}$$

(第1種変形ベッセル関数)

(7)式を数値解法するにあたって、つぎのような条件を取り来れた。

- ① 初期条件として、時刻 $t=0$ のとき、系の長さ $i=0$ とする。
- ② システムの評価尺度は、 ρ によって決定されるので、 $\rho=\lambda/\mu$ において、 $\mu=1$ としても一般性は失なわれない、このとき $\rho=\lambda$ となるので、(7)は次式のように変形できる。

$$P_n(t) = e^{-(\rho+1)t} [\sqrt{\rho}^n I_n(2\sqrt{\rho} t) + \sqrt{\rho}^{n-1} I_{n+1}(2\sqrt{\rho} t) + (1-\rho)\rho^n \sum_{k=n+2}^{\infty} \sqrt{\rho}^{-k} I_k(2\sqrt{\rho} t)] \quad (8)$$

実際の計算においては、(8)式を採用した。

- ③ 確率 $P_n(t)$ が、 10^{-8} 以下のときは、それ以降の確率を無視する。

すなわち、 $P_n(t) \leq 10^{-8}$ のとき、 $P_n(t) = 0$ とした。

- ④ (8)式において、 $\sum_{k=n+2}^{\infty} \sqrt{\rho}^{-k} I_k(2\sqrt{\rho} t)$ の項で、 $\sqrt{\rho}^{-k} I_k(2\sqrt{\rho} t)$ が、 10^{-8} 以下のときは、そこで計算を打ち切ってつぎに進む。

- ⑥ 利用率 ρ は、0.1から1.1まで0.1きざみにとる。

実際の計算では、条件③より、状態の数が m 個の有限個となるので、時刻 t における待ち行列の評価尺度は、(5)、(6)式より

<1> 時刻 t における待ち行列の平均

$$L_q(t) = \sum_{n=1}^m (n-1) P_n(t) \quad (9)$$

<2> 時刻 t における窓口がふさがっている確率

$$\pi(t) = \sum_{n=1}^m P_n(t) \quad (10)$$

となる。

状態の数を有限個としたために生じる誤差 (ε) は、次式により評価できる。

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) - \sum_{n=0}^m P_n(t) = 1 - \sum_{n=0}^m P_n(t) \quad (11)$$

本章では、許容誤差を

$$\varepsilon < 0.02$$

とした。

計算した結果として、待ち行列の平均と、窓口がふさがっている確率についての図を、図2、図3に示す。

結果から考えられることは、次の通りである。

- (1) 利用率 ρ が小さいほど、急速に平衡状態に達している。とくに ρ が0.5までは、平衡状態における理論解と一致している。

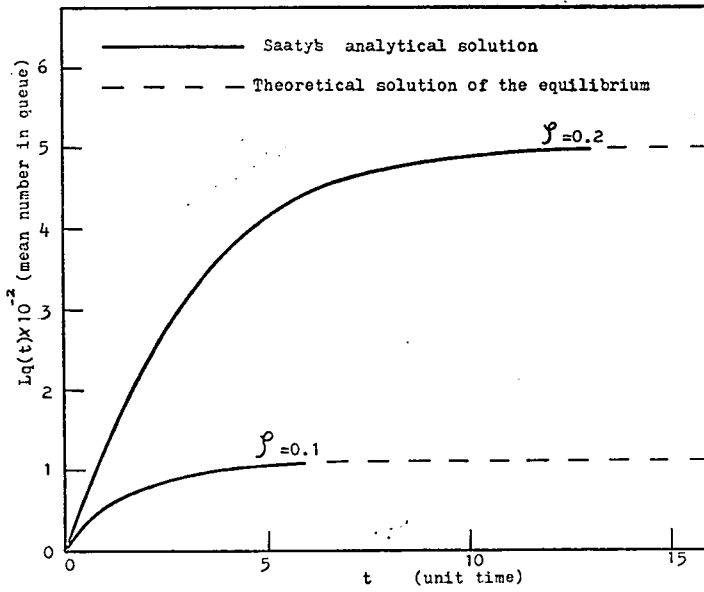


Fig. 2.1
Mean number in queue
at the time- t (1)

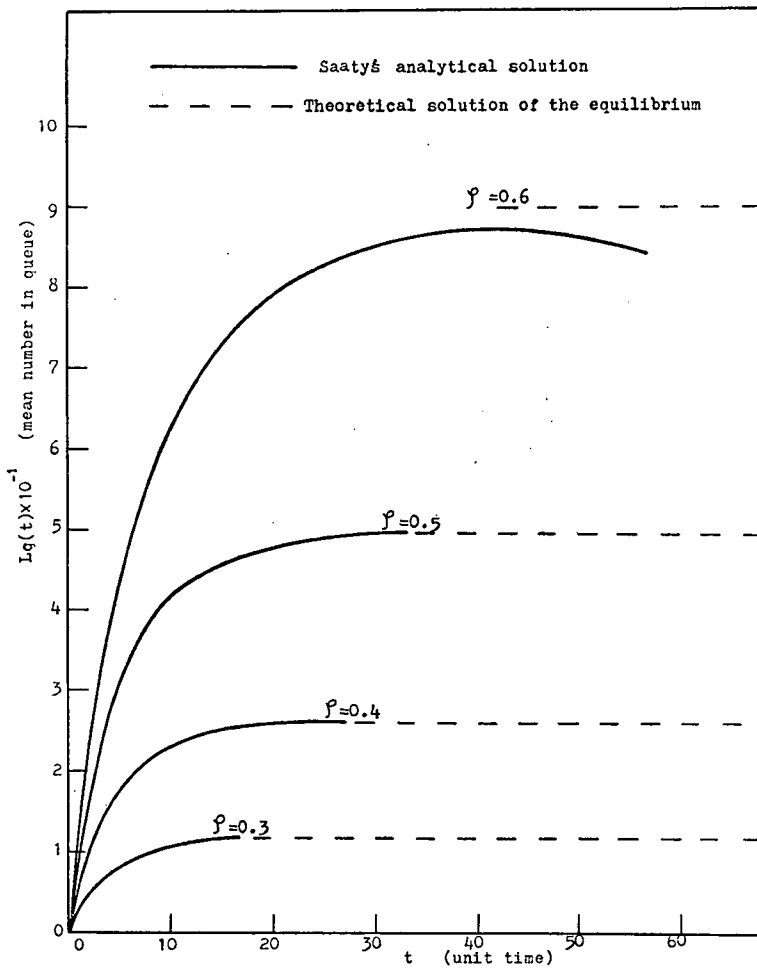


Fig. 2.2
Mean number in queue
at the time- t (2)

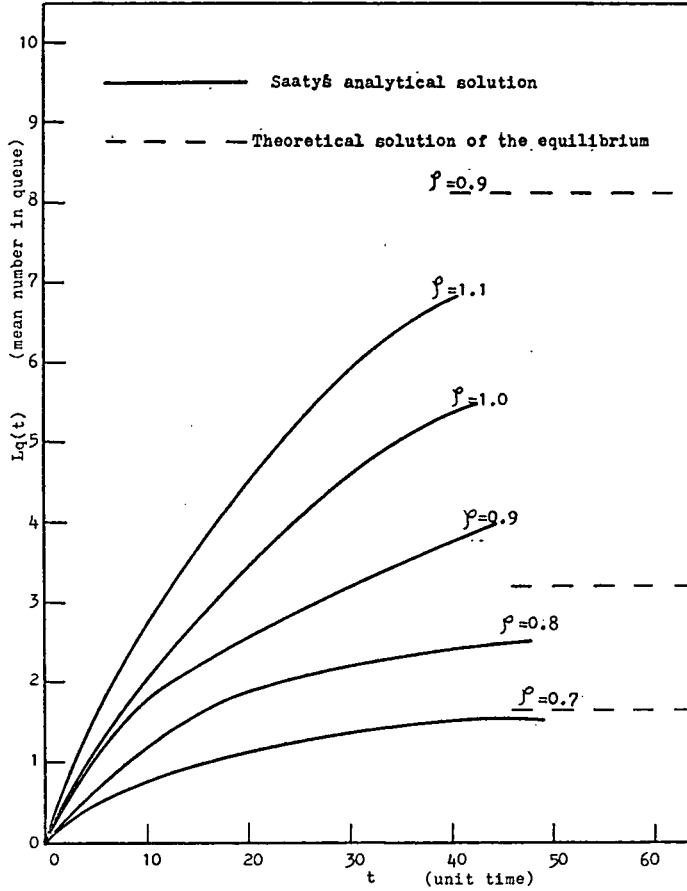


Fig. 2.3 Mean number in queue at the time- t (3)

- (2) 利用率 ρ が 0.6 以上になると、平衡状態における理論解に達していない。この現象は、 ρ が大きいほど顕著となっている。

これは、確率 $P_n(t)$ を 10^{-8} 以下で切り捨てたための計算誤差が影響しているものと思われる。

- (3) とくに、利用率 ρ が 0.7 以上では、つぎのような制約条件が存在したため、時刻 t がある程度以上大きくなると、数値解法が不可能となった。

すなわち、第 1 種変形ベッセル関数を漸化式により数値解法する場合

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!(\nu+k)!} \quad \text{において、} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \text{ が大きくなると、計算機内で、数値がオーバーフローするため、}$$

$$z (= 2\sqrt{\rho} t) < 87.0$$

つまり

$$t < 87.0 / 2\sqrt{\rho}$$

なる制約条件が存在したため、図のように結果は途中で切れてしまっている。

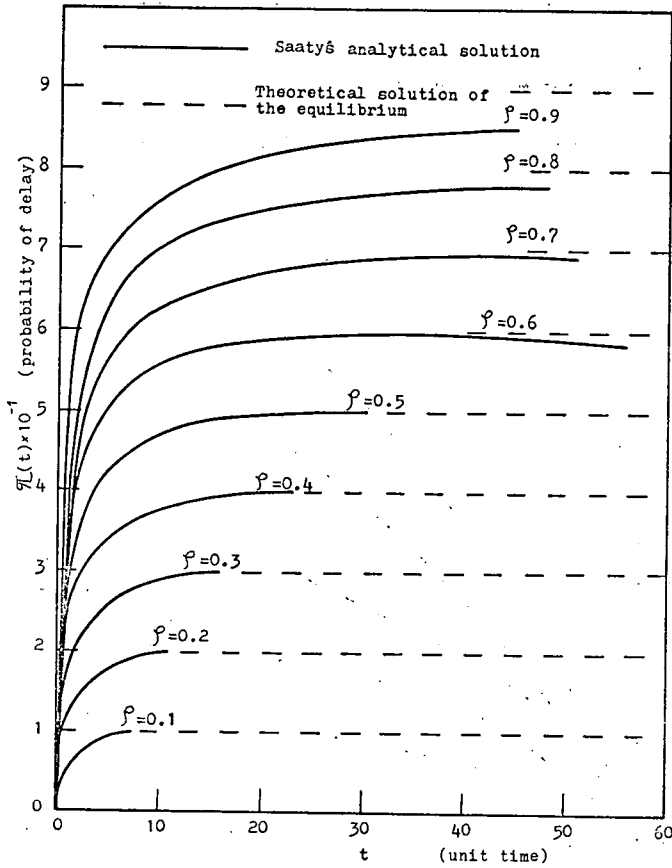


Fig. 3 Probability of delay at the time- t

なお一回の計算時間($t=200$ 単位時間のとき)は、約1分であった。(HITAC 8800/8700を使用)

4. 差分方程式

前章の解析解では、第1種変形ベッセル関数の数値解法に制約があるため、時刻 t が大きくなると、計算不能である。

それゆえ、著者は、つぎのような差分方程式を、直接数値計算することによって解を求めることを提案する。

λ を平均到着率、 μ を平均サービス率として、つぎの2つの確率を考える。

(1) $t+\Delta t$ 時点において、1単位も存在しない確率。..... $P_0(t+\Delta t)$

(2-1) t 時点において、1単位も存在せず、 Δt 間にも1人も到着しない確率。.....
..... $P_0(t)\{1-(\lambda\Delta t+O(\Delta t))\}$

(2-2) t 時点において、1単位存在し、 Δt 間に1単位がサービスを終了する確率.....
..... $P_1(t)(\Delta t+O(\Delta t))$

ここで(1)と(2)の事象の確率は、相等しいので、次式が成立する。

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+O(\Delta t)\cdots\cdots(12)$$

つぎに系中に n 単位存在する場合を考える。

$$(3) \quad t+\Delta t \text{ 時点において, 系中に } n \text{ 単位存在する確率。} \cdots \cdots P_n(t+\Delta t)$$

$$(4-1) \quad t \text{ 時点において, } n \text{ 単位存在し, } \Delta t \text{ 間に 1 単位も到着せず, またサービスも終了し} \\ \text{ない確率} \cdots \cdots P_n(t)\{1-(\lambda+\mu)\Delta t-O(\Delta t)\}$$

$$(4-2) \quad t \text{ 時点において, } n-1 \text{ 単位存在し, } \Delta t \text{ 間に 1 単位到着する確率。} \cdots \cdots \\ \cdots \cdots P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t+O(\Delta t))$$

$$(4-3) \quad t \text{ 時点において, } n+1 \text{ 単位存在, } \Delta t \text{ 間に 1 単位サービスを終了する確率。} \cdots \\ \cdots \cdots P_{n+1}(t)(\mu\Delta t+O(\Delta t))$$

ここでも(3)と(4)との確率は, 相等しいので,

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+P_n(t)(1-(\lambda+\mu)\Delta t)+P_{n+1}(t)\mu\Delta t+O(\Delta t) \cdots\cdots(13)$$

となる。

(12), (13)式において, $\rho=\lambda/\mu$ であるので, 前章と同様に $\mu=1$ のときは, $\rho=\lambda$ であり, また $O(\Delta t)$ は, 無視できるほど小さいものとする, 次式に整理できる。

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\rho\Delta t)+P_1(t)\Delta t \quad (n=0) \cdots\cdots(14)$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\rho\Delta t+P_n(t)(1-\rho\Delta t-\Delta t)+P_{n+1}(t)\Delta t \quad (n\geq 1) \cdots\cdots(15)$$

(14), (15)式が, 本研究で提案している差分方程式である。

ここで, 上野, 阪本¹⁰⁾は, (14), (15)式において, $\Delta t \rightarrow 0$ にならしめて, つぎのような微分方程式を求め, ルンゲ・クッタ・ギル法による数値解法を提案している。

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\rho P_0(t)+P_1(t) \quad (n=0)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=\rho P_{n-1}(t)-(1+\rho)P_n(t)+P_{n+1}(t) \quad (n\geq 1)$$

しかしながら, ルンゲ・クッタ・ギル法は一種の差分近似法であり, ほんらい(14), (15)式のように差分方程式で表現すべきものを, 微分方程式に変形し, また差分近似法に直して数値計算している過程には, 無駄があると思われる。

また, 上野らの提案する上述の方法では, 解析解との比較検討もされておらず, かつ, 数値計算するに当って, 微少時間 Δt の検討もあいまいである。

以上のような問題点を考慮して, 著者は, 3章における解析解と比較検討するために, 以下のような条件を使った。

① 初期条件として, 時刻 $t=0$ のとき, 系の長さを 0 とする。

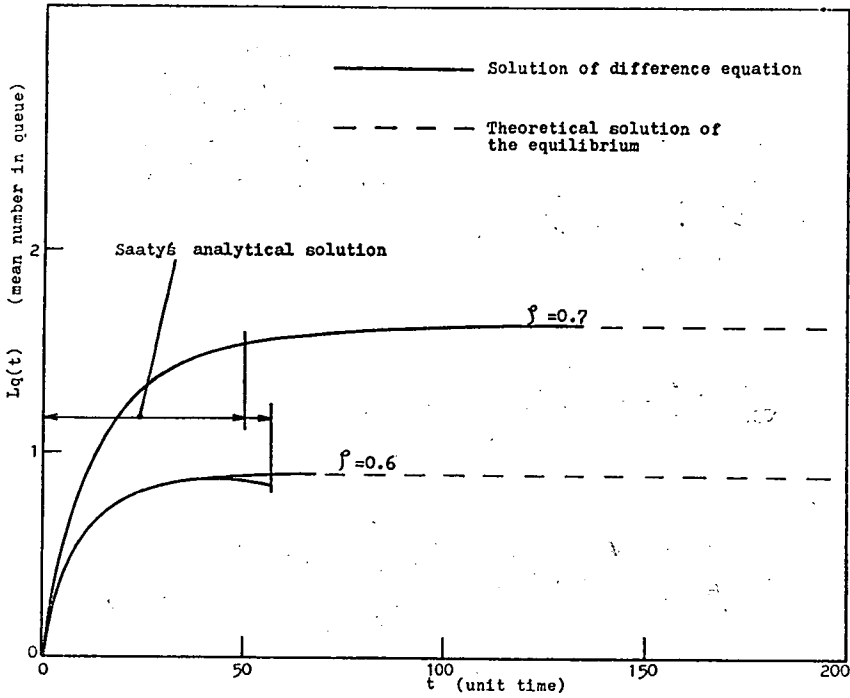
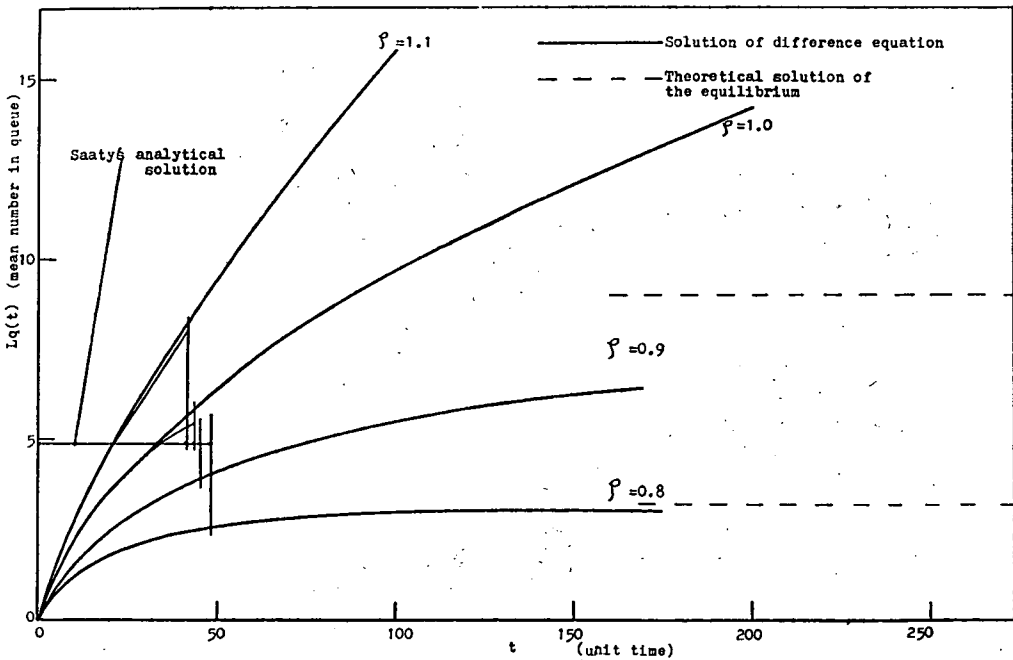
すなわち

$$\begin{cases} P_0(0)=1 \\ P_n(0)=0 \quad (n=1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

② 確率 $P_n(t)$ は, 10^{-8} 以下のときは, 無視する。

③ 利用率 ρ は, 0.1 から 1.1 まで, 0.1 きざに変化させる。

- ④ 微少時間 Δt を0.01にとる。
- ⑤ 評価尺度として、前章の待ち行列の平均(9)式、窓口がふさがっている確率(10)式を利用する。


 Fig. 4.1 Mean number in queue at the time- t (1)

 Fig. 4.2 Mean number in queue at the time- t (2)

条件①～⑤を使って数値計算したところ、 ρ が0.5までは、3章の解析解と一致した値を示した。

また ρ が0.6以上においても、途中までは同じ値を示していたので、ここでは、 ρ が0.6以上

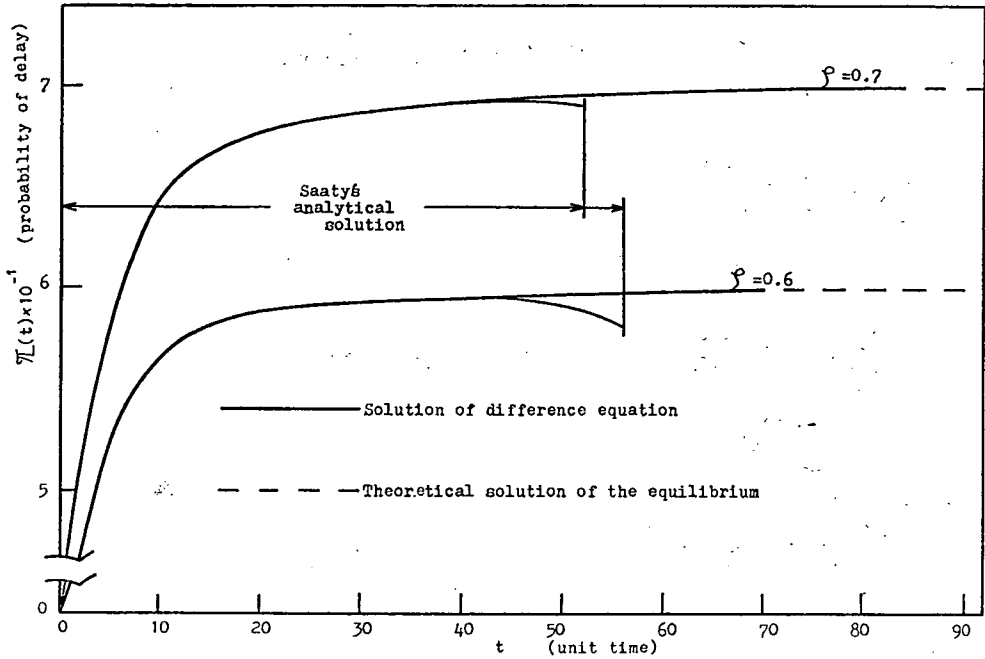


Fig. 5.1 Probability of delay at the time- t (1)

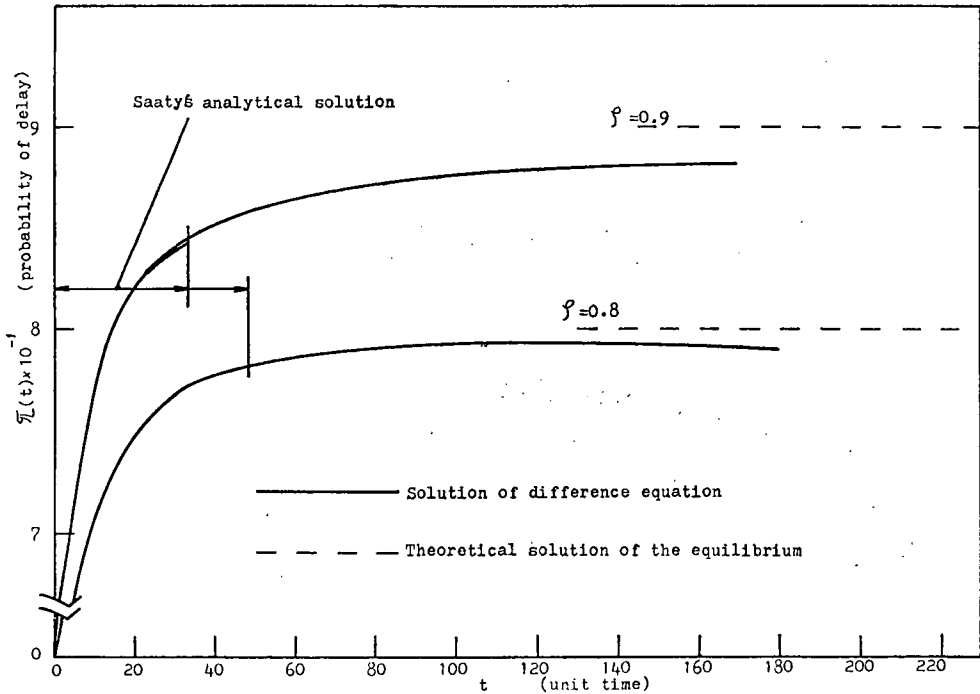


Fig. 5.2 Probability of delay at the time- t (2)

についての、時刻 t における待ち行列の平均と窓口がふさがっている確率についての図を、前章の解析解と比較して、図4、図5に示す。

また確率 $P_n(t)$ が、 10^{-9} 以下のときは、その確率を無視したために、生じる誤差は、(11)式によって評価できるが、本章では、許容誤差を

$$\varepsilon < 1 - \sum_{n=0}^m P_n(t) = 0.01 \dots \dots \dots (16)$$

とした。

図6に、利用率 ρ と $\sum_{n=0}^m P_n(t)$ との関係についての図を示す。

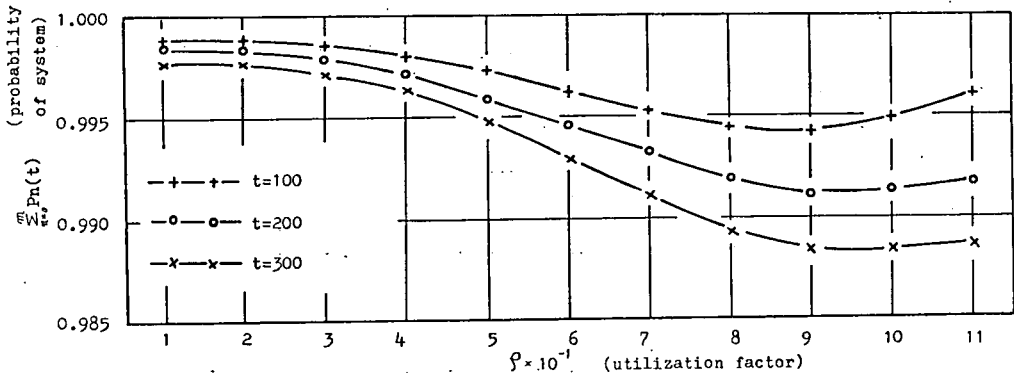


Fig. 6 The relation between utilization factor (ρ) and probability of system ($\sum_{n=0}^m P_n(t)$)

結果から言えることは、3章の解析解と同様のことになるが、

- ① 利用率 ρ が小さいほど、収束が早く、平衡状態に達している。
- ② 利用率 ρ が1.0以上になると2章で述べたように発散していることがわかる。
- ③ 利用率 ρ が、0.8、0.9で平衡状態における理論解に一致しないのは、計算打ち切りによる誤差と思われる。

また、 ρ が0.8以上において途中で図の表示が切れているのは、(16)式を満足しなくなったため、そこで計算を打ち切ったためである。その他として、計算の切り捨てによる誤差は、利用率 ρ が0.9のとき一番大きくなっている。

これらの結果から、Saaty の解析解において、もし第1種変形ベッセル関数に関する制限がとりのぞけたとしても式が複雑であるので、著者の提案した差分方程式で十分に代用できることが明らかになった。

またさらに進んだ $M/M/S$ システムやもっと一般的なシステムでも、基本的な差分方程式をたてることが出来れば、その差分方程式を直接解くことにより、過渡状態を解析できるものと思われる。

なお、著者の方法では、一回の計算時間 ($t=200$ 単位時間のとき) は、約1分であった。(HITAC 8800/8700を使用)。

5. ま と め

以上の結果から、 $M/M/1(\infty)$ システムの待ち行列の過渡状態を解析するためには、Saaty, T.L. の提案した解析解によって状態変化を求めるよりも、基本的な差分方程式によって、その状態変化を解析することが、利用率 ρ との関係から好ましいものと考えられる。

本研究の応用として、機械工業における工程の生産計画上必要となる加工品と機械設備との間に生じるジョブ・ショップ・スケジューリング問題のうち、とくに生産量が定常状態に達するまでの工程の状態の把握などをする場合に適用できる。

この場合、本研究は、単一製品を単一設備で製造する場合の先着順サービスというもっとも単純なジョブ・ショップ・スケジューリングの問題の過渡状態の把握という非常に簡単なモデル構成である。

したがって、ここで求められた過渡状態から定常状態に達するまでの時間の関係は、ジョブ・ショップ・スケジューリングでいう負荷率と対象する生産システムの安定性との関係を求めたものといえ、単純なモデルであるので、負荷率（利用率）が大きいほど、定常状態に達する時間が長いという直客的に思考したものと一致する。

ジョブ・ショップ・スケジューリングは、多品種の製品を数種類の機械設備で加工する場合の生産計画の方法について、優先順位を考慮した研究といえるが、待ち行列のシステムを考えると、到着する客が、異なった目的をもってサービスを受けにくる状態で、客によって優先順位を変更しなければならないようなシステムと記述できる。

現在行なわれているジョブ・ショップ・スケジューリングは、多くの場合、到着時間一定、サービス時間一定という仮定が含まれているが、実際の工程では、到着やサービスは分布している例が考えられる。

このようなことを考えると、本研究の将来の課題としては、優先順位の変更やサービス窓口の増加などを考えた待ち行列システムの過渡状態の解析が必要となるものと考えている。また実際に生産工程の稼動初期の状態をシミュレーション等によって検討することも必要であると考えている。

おわりに、本研究に当っては、電気通信大学の本間鶴千代教授、本学機械工学科の蓮尾講師、大滝助手の助言によるところ大であった。ここに御協力に対して感謝いたします。

なお、計算にあたっては、本学計算センターのOKITAC-5090Mシステムならびに東京大学大型計算センター HITAC 8800/8700 システムを使用し、第1種変形ベッセル関数の数値解法には、同センターの科学技術計算ライブラリー(MSL)を利用した。ここに付記して各センターに厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Bailly, N.T.J.: Some further results in the non-equilibrium theory of a simple queue, J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, Vol.19, p.326~333, 1957.

- 2) Erlang, A.K.: Probability and telephone calls, *Nyt Tidsskr. Mat.*, Ser. B, Vol.20, p.33~39, 1909.
- 3) 本間鶴千代: 待ち行列の理論, 理工学社, 1970.
- 4) 国沢, 本間: 応用待ち行列事典, 広川書店, 1971.
- 5) Lerderman, W. and Reuter, G.E.: Special theory for the differential equations of simple birth and death processes, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 246, p.321~369, 1954.
- 6) 森村, 大前: 待ち行列の理論と実際, 日科技連, 1962.
- 7) 佐治, 白根, 横井, 大前: オペレーションズリサーチ理論と実際, 培風館, 1970.
- 8) Saaty, T.L.: *Element of queueing theory with applications*, McGraw-Hill, 1961.
- 9) 上野, 阪本: 待ち行列における過渡現象の数値計算法 ($M/M/1(\infty)$ の場合), 電子通信学会全国大会, 1972.